Olympiadeklasse 5

57. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

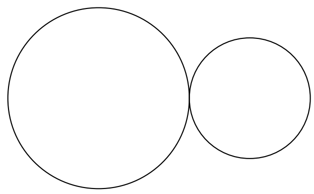
570511

Von einer Baustelle soll Schutt abgefahren werden. Der Lkw einer Firma fährt jeweils zweimal am Tag.

a) Am ersten Tag transportierte er insgesamt 9500 kg. Bei der ersten Fahrt waren es 500 kg weniger als bei der zweiten Fahrt. Wie schwer war die Ladung bei jeder Fahrt?
b) Am zweiten Tag transportierte er insgesamt 9600 kg. Die Ladung der ersten Fahrt war diesmal doppelt so schwer wie bei der zweiten Fahrt. Wie viel Kilogramm Schutt hatte der Lkw jeweils geladen?
c) Insgesamt sind 100 t Schutt abzufahren. Am wievielten Arbeitstag ist der ganze Schutt abtransportiert, wenn täglich etwa 9600 kg Schutt abtransportiert werden?

570512

Man kann zwei beliebig große Kreise so zeichnen, dass sie sich in genau einem Punkt berühren (siehe Abbildung).



a) Zeichne drei beliebige Kreise so, dass jeder der drei Kreise die beiden anderen berührt. *Hinweis:* Zeichne in allen Aufgabenteilen die Kreise mit dem Zirkel.
b) Vier Kreise kann man so anordnen, dass jeder Kreis genau zwei andere berührt. Zeichne eine solche Situation.
c) Man kann aber auch vier Kreise so anordnen, dass jeder der Kreise **alle anderen** berührt. Finde für diese Situation zwei mögliche Lösungen und zeichne sie.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

570513

Die vier Jungen Andreas, Benedikt, Christian und Daniel stehen nebeneinander. Lara stellt fest, dass sie alle unterschiedlich groß sind, und macht folgende vier Aussagen:

(1) Christian ist der Zweitgrößte.
(2) Andreas ist nicht der Größte.
(3) Der Junge links von Daniel ist größer als Daniel.
(4) Daniel ist kleiner als Andreas.

a) Zeige, dass man aus diesen Aussagen eindeutig die Reihenfolge der vier Jungen nach ihrer Größe herausfinden kann. Gib diese Reihenfolge an. Beginne dabei mit dem größten Jungen.
b) Eine der vier Aussagen ist sogar überflüssig. Welche ist das? Begründe, dass diese überflüssig ist.

570514

Lena denkt sich eine Zahl. Diese multipliziert sie mit 17. Zu diesem Produkt addiert sie 13 und multipliziert das Ergebnis mit 11. Schließlich addiert sie noch einmal zur entstandenen Zahl 4 hinzu und erhält 2017.

a) Welche Zahl hat sich Lena gedacht? Führe eine Probe durch!
b) Lena hat ihre Anfangszahl im Verlauf ihres Prozesses zweimal mit Zahlen multipliziert und zweimal Zahlen addiert. Die Zahlen, die sie dabei verwendet hat, sind 4, 11, 13 und 17.
Lena überlegt nun: Wenn ich diese vier Zahlen in einer anderen Reihenfolge mit meiner Anfangszahl wieder, wie eben, erst multipliziere, dann addiere, dann wieder multipliziere und schließlich addiere – kann ich dann auf ein größeres Ergebnis als 2017 kommen? Finde die Rechnung für das größtmögliche Ergebnis.
c) Lena überlegt noch weiter: Komme ich auf eine noch größere Zahl, wenn ich die Reihenfolge der Multiplikationen und der Additionen ändere?
Untersuche diese Frage.

Olympiadeklasse 6

57. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

570611

a) Die 30 Schüler der Klasse 6a laufen 15 Minuten lang Runden auf dem kleinen Sportplatz der Schule. Ein Zehntel der Schüler der Klasse schafft in dieser Zeit jeweils 15 Runden. Ein Fünftel der Schüler läuft je 12 Runden. Ein Drittel schafft je 10 Runden, und die restlichen Schüler laufen jeweils 8 Runden auf dem Sportplatz.
Wie viele Runden sind von allen Schülern zusammen insgesamt gelaufen worden?

b) In der Klasse 6b läuft die Hälfte der Schüler jeweils 10 Runden, ein Achtel der Schüler je 9 Runden, ein Viertel schafft je 8 Runden und die restlichen drei Schüler laufen jeweils 14 Runden.
Wie viele Schüler hat die Klasse 6b und wie viele Runden sind die Schüler dieser Klasse insgesamt gelaufen?

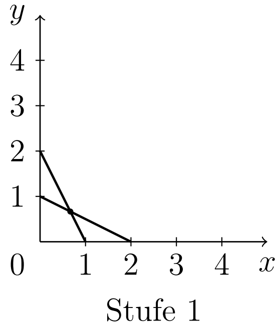
570612

Lena zeichnet Muster in Koordinatensysteme.

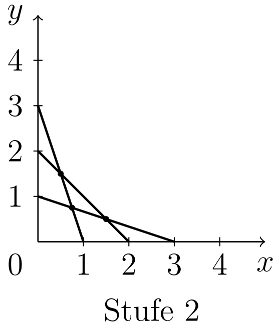
In der 1. Stufe zeichnet sie zwei Strecken vom Punkt (0|1) zum Punkt (2|0) und vom Punkt (0|2) zum Punkt (1|0). Die zwei Strecken schneiden sich in genau einem Punkt.

In der 2. Stufe zeichnet Lena drei Strecken von (0|1) zu (3|0), von (0|2) zu (2|0) und von (0|3) zu (1|0). Diese drei Strecken schneiden sich in genau drei Punkten.

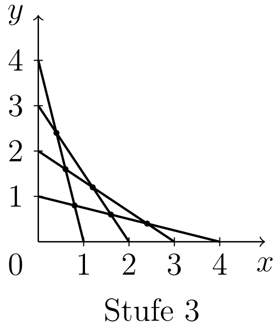
In der 3. Stufe werden vier Strecken gezeichnet und so weiter (siehe Abbildungen der Stufen 1–3).



Stufe 1



Stufe 2



Stufe 3

Hinweis: Niemals verlaufen drei Strecken im Muster einer Stufe durch denselben Punkt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

a) Zeichne die Strecken der Stufen 4, 5 und 6 in verschiedene Koordinatensysteme.

b) Wie viele Schnittpunkte haben die Strecken in den Stufen 3, 4, 5 und 6 jeweils?

c) Berechne – ohne zu zeichnen – die Anzahl der Schnittpunkte der Strecken in der 20. Stufe.

<u>570613</u>

Gegeben sind folgende sieben Karten, drei Zahlenkarten und vier Zeichenkarten:

7	**8**	**9**	(	)	$+$	$\cdot$

Diese sieben Karten kann man jetzt zu mathematisch sinnvollen Termen anordnen, z. B. $7 + (8 \cdot 9)$ oder $(9 + 8) \cdot 7$. Es sollen immer alle sieben Karten verwendet werden.

a) Bei welcher Anordnung der sieben Karten erhältst du das größte Ergebnis? Welche Anordnung führt zum kleinsten Ergebnis?

b) Daniel möchte eine Anordnung der sieben Karten finden, die als Ergebnis 120 hat. Er stellt fest: „Mit den vorhandenen Karten geht es nicht. Wenn ich aber nur eine Zahlenkarte gegen eine neue Karte mit einer anderen einstelligen, noch nicht vorhandenen Zahl austausche, dann geht es.“
Zeige, dass Daniel mit beiden Aussagen Recht hat.

c) Daniel möchte nun aus den vier Zeichenkarten und drei beliebigen Zahlenkarten mit einstelligen Zahlen das Ergebnis 111 erhalten.
Begründe, warum er für dieses Ergebnis keine Lösung finden kann.

Hinweis: Da Addition und Multiplikation kommutativ sind, sollen Anordnungen nicht als verschieden angesehen werden, wenn sie nur durch Vertauschung zweier Summanden oder Faktoren entstehen, wie es z. B. bei $7 + (8 \cdot 9), 7 + (9 \cdot 8), (8 \cdot 9) + 7$ und $(9 \cdot 8) + 7$ der Fall ist.

<u>570614</u>

Vier Lampen stehen in einer Reihe. Zu jeder Lampe gehört genau ein Schalter. Jede Bedienung eines Schalters wechselt den Zustand der zugehörigen Lampe von „aus“ nach „ein“ bzw. von „ein“ nach „aus“.

Anfangs sind alle vier Lampen aus.

Nun kommen vier Leute. Der Erste soll einen Schalter betätigen, der Zweite sieht das Ergebnis und soll zwei Schalter betätigen, der Dritte sieht wieder das bisherige Ergebnis und soll drei Schalter betätigen und der Vierte entsprechend vier.

a) Gib ein Beispiel für die Schaltvorgänge der vier Leute so an, dass am Ende alle vier Lampen leuchten.

b) Zeige, dass sich das entsprechende Problem auch für fünf Lampen, fünf Schalter und fünf Leute lösen lässt, wenn die fünf Leute wieder der Reihe nach einen, zwei, drei, vier und fünf Schalter betätigen.

c) Eine echte Herausforderung:
Das entsprechende Problem für sechs Lampen lässt sich aber nicht lösen. Begründe diese Aussage.

Olympiadeklasse 7

57. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

570711

Simon hat begonnen, Karten eines Sammelkartenspiels zu sammeln. Die Karten, die er schon hat, gehören zu vier Typen: Die Hälfte seiner Karten sind Heldenkarten. Von den übrigen Karten sind zwei Drittel Energiekarten. Drei Viertel der Karten, die weder Heldenkarten noch Energiekarten sind, sind Monsterkarten. Die letzte Karte ist eine Verzauberungskarte.

Berechne, wie viele Karten Simon insgesamt bereits gesammelt hat.

570712

Im Baumarkt kauft Milena vier Bretter, die gleich viel kosten. An der Kasse bezahlt sie die Bretter mit einem 10-Euro-Schein und erhält 6 Münzen als Rückgeld: eine 50-Cent-Münze, eine 20-Cent-Münze, eine 10-Cent-Münze, eine 5-Cent-Münze, eine 2-Cent-Münze und eine 1-Cent-Münze. Milena, die sich den Preis eines einzelnen Brettes gemerkt hat, stellt sofort fest, dass das Rückgeld nicht stimmt.

Und tatsächlich: Der Kassierer hat Milena eine Münze zu viel herausgegeben.

Welche Münze muss Milena zurückgeben?

Begründe auch, warum nur diese Münze die zu viel herausgegebene Münze sein kann, und berechne, wie viel jedes der Bretter kostet.

570713

Von einem Viereck $ABCD$ ist bekannt:

(1) Die Gerade AC ist eine Symmetrieachse des Vierecks $ABCD$.
(2) Die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ verlaufen durch das Innere des Vierecks $ABCD$ und sind gleich lang.
(3) Die Seite $\overline{AB}$ und die Diagonale $\overline{AC}$ sind gleich lang.

Ermittle die Größen der vier Innenwinkel des Vierecks $ABCD$.

Hinweis: Alle gesuchten Größen sind mit geometrischen Argumenten exakt zu bestimmen. Messungen mit Lineal oder Geodreieck sind dafür nicht zulässig, da diese niemals exakt sind.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

570714

Florian würfelt gleichzeitig und unabhängig voneinander mit drei Spielwürfeln, deren Seiten wie üblich mit den Augenzahlen von 1 bis 6 beschriftet sind. Einer der Würfel ist rot, einer ist gelb, und der dritte ist blau. Aus den gewürfelten Augenzahlen bildet Florian dreistellige Zahlen. Die Augenzahl auf dem roten Würfel gibt die Hunderter an, die Augenzahl auf dem gelben Würfel die Zehner und die Augenzahl auf dem blauen Würfel die Einer.

a) Ermittle, wie viele dreistellige Zahlen so entstehen können.

b) Ermittle alle Möglichkeiten, eine dreistellige Zahl mit der Quersumme 7 zu erhalten.

c) Florian hat zweimal mit allen drei Würfeln gewürfelt und die entsprechenden dreistelligen Zahlen gebildet. Die eine der beiden Zahlen ist um 547 größer als die andere.

   Welche beiden Zahlen könnte Florian erhalten haben? Finde alle Möglichkeiten und begründe auch, dass es keine weiteren gibt.

Olympiadeklasse

8

57. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

570811

Das Sommerheft einer Schülerzeitung gab es für 1,20 Euro zu kaufen. Für das Herbstheft wurde der Preis gesenkt. Es wurden dreimal so viele Herbsthefte verkauft wie Sommerhefte, und trotz des gesenkten Preises haben sich die Einnahmen verdoppelt.

a) Wie viel kostet das Herbstheft dieser Schülerzeitung?

b) Ein Schüler behauptet: „Wir können den Preis für die Winterhefte im Vergleich zu den Herbstheften derart verringern, dass wir beim Verkauf von viermal so vielen Winter- wie Sommerheften eine Verdreifachung der Einnahmen im Vergleich zum Sommerheft erzielen.“

Untersuche, ob die Behauptung des Schülers stimmt.

570812

In einer Chronik aus dem Jahre 1685 fand man die folgende kaufmännische Abrechnung:

	Gulden	Kreuzer	Pfennig
	4	27	2
		36	1
	1	43	3
	2	8	3
		41	1
Summe	9	37	2

a) Gib an, wie viel Pfennig ein Kreuzer und wie viel Kreuzer ein Gulden nach dieser Abrechnung wert gewesen sein könnten.

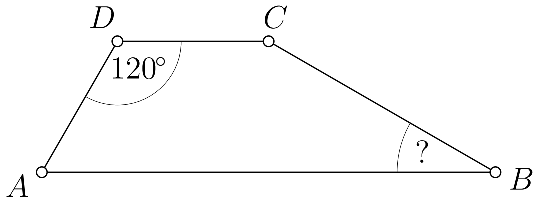
b) Zeige, dass dein Ergebnis den Angaben in der Tabelle entspricht.

c) Erläutere, wie du dein Ergebnis ermittelt hast.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

570813

In einem Viereck $ABCD$ sind die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ parallel zueinander. Die Seite $\overline{AD}$ ist genau so lang wie die Seite $\overline{CD}$. Die Seite $\overline{AB}$ ist dreimal so lang wie die Seite $\overline{CD}$. Die Größe des Winkels $\sphericalangle ADC$ beträgt 120°.



Ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle CBA$.

Hinweis: Alle gesuchten Größen sind mit geometrischen Argumenten exakt zu bestimmen. Messungen mit Lineal oder Geodreieck sind dafür nicht zulässig, da diese niemals exakt sind.

570814

a) Berechne die Summe der 9 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen von 28 bis 36.

b) Beweise: Wenn eine ganze Zahl a durch 4 teilbar ist, dann ist die Summe der 9 aufeinanderfolgenden, mit a beginnenden ganzen Zahlen durch $(4 \cdot 9 =)$ 36 teilbar.

c) Stelle fest, ob es eine durch 5 teilbare, positive ganze Zahl a und eine ganze Zahl n mit $n > 1$ derart gibt, dass die Summe der n aufeinanderfolgenden, mit a beginnenden ganzen Zahlen durch $5 \cdot n$ teilbar ist.

d) (Zusatzaufgabe für besonders Interessierte) Beweise: Für jede positive ganze Zahl a gibt es eine ganze Zahl n mit $n > 1$ derart, dass die Summe der n aufeinanderfolgenden, mit a beginnenden ganzen Zahlen durch $a \cdot n$ teilbar ist.

Olympiadeklassen **9 – 10**

57. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Jahrgangsrunden 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

571011

Bernd und Inge spielen folgendes Spiel:

Zu Beginn liegt ein Stapel Karten auf dem Tisch, der mindestens drei Karten enthält.

Die beiden sind abwechselnd am Zug.

Im ersten Zug teilt Bernd den Stapel in zwei kleinere Stapel auf. Es sind nur Stapel mit mindestens einer Karte zugelassen.

Jeder folgende Zug besteht aus zwei Teilen. Zunächst ist ein Stapel zu entfernen. Danach ist der andere in zwei kleinere Stapel zu zerlegen. Am Ende eines Zuges liegen also stets genau zwei Stapel auf dem Tisch.

Damit ein Zug möglich ist, muss wenigstens einer der Stapel auf dem Tisch mehr als eine Karte aufweisen.

Gewonnen hat, wer den letzten (möglichen bzw. gültigen) Zug machen konnte.

a) Der (Start-)Stapel enthält genau vier Karten. Wie kann Bernd gewinnen? Besteht die Möglichkeit, dass Inge gewinnt?
b) Für welche Größen des Startstapels (bzw. für welche Anzahl der Karten im Startstapel) kann Bernd den Gewinn erzwingen, für welche Größen gelingt dies Inge?

571012

Für ganze Zahlen m und n gelte $(n^2 + n) \cdot (m^2 - 1) = 240$.

Bestimmen Sie unter Beachtung aller Lösungsmöglichkeiten den kleinsten und den größten Wert der Differenz $n - m$.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

571013

Es gibt positive ganze Zahlen n, also $n > 0$, für die sowohl n als auch deren Quersumme $Q(n)$ durch 57 teilbar ist. Solche Zahlen n werden in dieser Aufgabe betrachtet.

a) Geben Sie zwei Beispiele für solche Zahlen n an und weisen Sie nach, dass diese Zahlen die gestellten Bedingungen erfüllen.

b) Ermitteln Sie die kleinste Zahl n mit dieser Eigenschaft und weisen Sie nach, dass sie die gestellten Bedingungen erfüllt.

571014

Gegeben sind die beiden Funktionen a und b mit den Gleichungen $a(x) = -2\,|x| + 11$ und $b(x) = \frac{1}{2}\,|x-7|$.

a) Stellen Sie die Graphen der Funktionen a und b in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar.

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen von a und b.

c) Der Punkt C sei der Schnittpunkt des Graphen der Funktion a mit der y-Achse. Beweisen Sie, dass der Punkt C und zwei der Schnittpunkte der Graphen von a und b ein rechtwinkliges Dreieck bestimmen.

571015

Gegeben sei ein (nicht überschlagenes) Viereck $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, $|AD| = |DC| = |CB|$ und $|DB| = |BA| = |AC|$.

Bestimmen Sie die Größen der Innenwinkel dieses Vierecks.

571016

In der Ebene sind zwei Punkte A und B mit dem Abstand $|AB| = 7$ gegeben; außerdem seien x und y positive reelle Zahlen.

Gesucht sind alle Punkte P, für die $|PA|$ eine der Zahlen 5, x und y ist und gleichzeitig $|PB|$ eine der Zahlen 5, x und y ist. (Es ist also auch erlaubt, für beide Strecken eine gleiche Länge zu wählen.)

a) Wie viele solche Punkte P gibt es für $x = 4$ und $y = 12$?

b) Bestimmen Sie die Menge M aller derjenigen Paare (x, y), für die es genau 18 solche Punkte P gibt.
Skizzieren Sie M in einem rechtwinkligen Koordinatensystem.

Olympiadeklassen 11 − 12

57. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

571211

Man bestimme alle reellen Zahlen $z \leq 100\,000$, für die positive ganze Zahlen m und n existieren, die die zwei Gleichungen

$$z - n^2 = m^4\,, \tag{1}$$
$$(n+1)^2 - z = 2^m \tag{2}$$

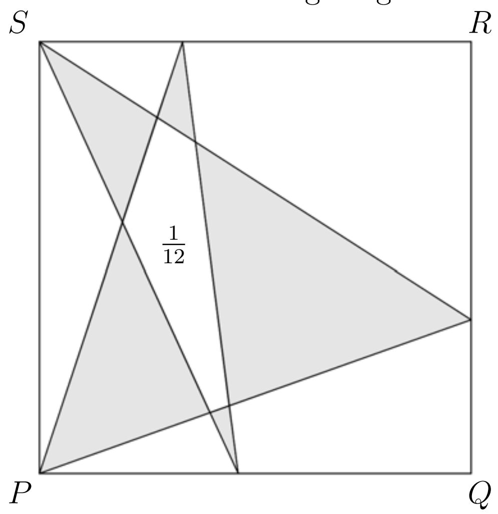
erfüllen.

571212

Die Ecken eines fünfzackigen Sterns liegen so auf den Seiten eines Quadrates $PQRS$ mit der Seitenlänge 1, dass zwei Ecken des Sterns mit den Eckpunkten P und S übereinstimmen und im Inneren der Kanten $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ und $\overline{RS}$ jeweils ein weiterer Eckpunkt des Sterns liegt, siehe Abbildung A 571212.

Der Flächeninhalt des mittleren Fünfecks beträgt 1/12.

Man berechne die Summe der Flächeninhalte der grau gefärbten Dreiecke.



A 571212

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

571213

Für drei positive reelle Zahlen a, b, c gelte $a \leq b \leq c$ und $a \cdot b \cdot c = 1$.

Man beweise, dass dann a und c die Ungleichung

$$(a+1)(c+1) > 3$$

erfüllen.

571214

In einem Quadrat mit der Seitenlänge 2017 liegen 10 000 Punkte.

a) Man beweise, dass es einen Kreis mit dem Durchmesser 100 gibt, in dessen Innerem mindestens 12 dieser Punkte liegen.
b) Man beweise, dass es sogar einen Kreis mit dem Durchmesser 100 gibt, in dessen Innerem mindestens 15 der Punkte liegen.