MO

Olympiadeklasse
5

64. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

640511

Anna liest ein Buch, bei dem auf jeder Seite die Seitenzahl aufgedruckt ist. Dabei hat die jeweils linke Seite des aufgeschlagenen Buches eine gerade Seitenzahl und die rechte Seite eine ungerade Seitenzahl.

a) Anna liest gerade auf der Seite 44.
Welche beiden Seitenzahlen des Buches hat Anna aufgeschlagen, nachdem sie von hier aus genau 17-mal umgeblättert hat?

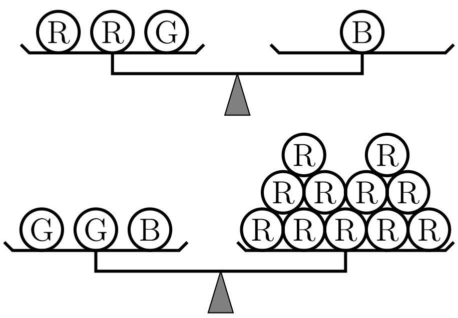
b) Nun liest Anna auf der Seite 123.
Wie oft muss sie umblättern, bis sie wieder auf eine Seitenzahl trifft, bei der die Zehnerziffer um eins größer ist als die Hunderterziffer und die Einerziffer um eins größer ist als die Zehnerziffer? Gib die Seitenzahlen an, die Anna nun sieht.

640512

Julia hat rote, grüne und blaue Kugeln.

Alle Kugeln einer Farbe wiegen gleich viel. Kugeln verschiedener Farben wiegen unterschiedlich viel.

Weiterhin stellt Julia fest:



(1) Zwei rote Kugeln und eine grüne Kugel wiegen zusammen genau so viel wie eine blaue Kugel.

(2) Zwei grüne Kugeln und eine blaue Kugel wiegen zusammen genau so viel wie elf rote Kugeln.

a) Ermittle aus diesen Angaben, welche Farbe die schwersten Kugeln haben.

b) Berechne, wie viele von den leichtesten Kugeln zusammen so viel wiegen wie eine der schwersten Kugeln.

c) Eine Kugel des mittleren Gewichts wiegt 90 Gramm.
Wie viel wiegen die Kugeln der anderen beiden Farben?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

640513

Für die beiden fünften Klassen einer Schule findet ein Sportfest mit den Stationen 60-m-Lauf, Weitsprung und Ballwurf statt.

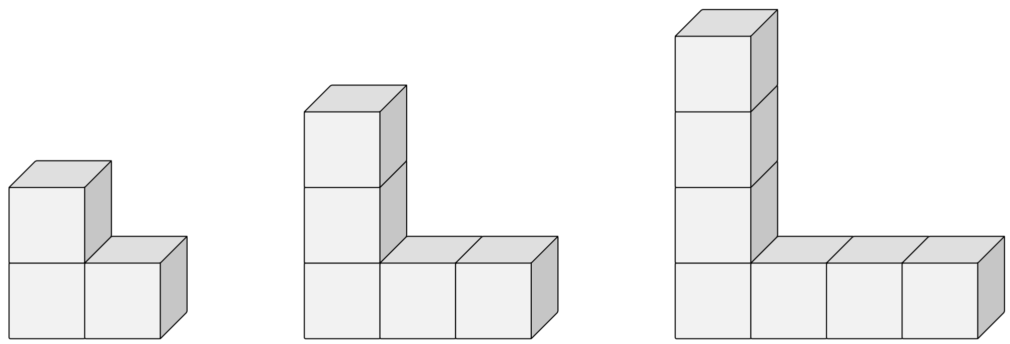
a) Notiere alle verschiedenen Reihenfolgen, in denen die drei Stationen nacheinander angelaufen werden können.
b) Die Klasse 5a startet beim 60-m-Lauf, wechselt dann zum Weitsprung und geht schließlich zum Ballwurf. Welche Reihenfolgen sind nun noch für die Klasse 5b möglich, wenn beide Klassen mit dem Sportfest zur gleichen Zeit beginnen und wenn die zwei Klassen nicht gleichzeitig an einer Station sein sollen?

Am Schluss des Sportfestes gibt es ein Tauziehen. Jede der beiden Klassen bildet vier Mannschaften. Jede Mannschaft aus der Klasse 5a tritt gegen jede Mannschaft aus der 5b genau einmal an.

c) Ermittle die Anzahl der Wettkämpfe im Tauziehen.

640514

Jonas klebt gleich große Würfel aneinander (siehe Abbildung). Dabei kommen von einer zur nächsten Stufe jeweils zwei Würfel hinzu. Dann betrachtet Jonas seine Würfelgebäude und zählt die von oben, von unten, von vorn, von hinten, von links und von rechts sichtbaren Quadratflächen: Bei der Stufe 1 zählt er 14 Quadratflächen.



Stufe 1 Stufe 2 Stufe 3

a) Wie viele sichtbare Quadratflächen haben die Würfelgebäude der Stufen 2 und 3?
b) Wie viele Quadratflächen sind bei den Würfelgebäuden der Stufen 4 und 5 sichtbar?
c) Wie viele Quadratflächen wären bei dem Würfelgebäude der Stufe 10 sichtbar?
Wie viele Würfel müsste Jonas zusammenkleben, um dieses Gebäude der Stufe 10 herzustellen?
d) Ermittle, wie viele kleine Würfel Jonas für ein solches Würfelgebäude benötigen würde, das genau 206 sichtbare Quadratflächen hat.

Olympiadeklasse **6**

64. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

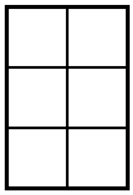
640611

Kerrin hat am 29.11. Geburtstag. Sie überlegt sich, welche vierstelligen Zahlen sie aus den vier Ziffern 2, 9, 1 und 1 bilden kann. Solche Zahlen nennt sie *Geburtstagszahlen*. Katrin hat am 18.09. Geburtstag; ihre Geburtstagszahlen werden also aus den Ziffern 1, 8, 0 und 9 in beliebiger Reihenfolge gebildet, wobei die 0 nicht vorn stehen darf, weil Geburtstagszahlen immer vierstellig sein sollen.

a) Gib für Kerrin und Katrin jeweils die kleinste und die größte Geburtstagszahl an.
b) Silvia hat am 31.12. Geburtstag. Wie viele Geburtstagszahlen hat sie?
c) Wie viele Geburtstagszahlen hat Neo, der am 01.01. geboren ist?
d) Es gibt Geburtstage, zu denen 18 Geburtstagszahlen gehören.
Gib ein solches Geburtsdatum an.

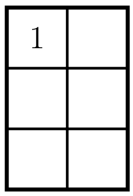
640612

Die Geschwister Sina und Tom haben jeder ein Fenster in ihrem Zimmer, das durch Sprossen in sechs Teilflächen unterteilt wird (siehe Abbildung).
Die Oma kommt zu Besuch und bringt beiden Kindern jeweils eine Packung mit Fensterbildern mit. Jede Packung enthält vier verschiedene Fensterbilder jeweils doppelt, also insgesamt acht Fensterbilder.



Jedes Kind möchte an jede seiner sechs Fensterflächen genau ein Bild anbringen. Dabei sollen jeweils die drei untereinander liegenden Bilder verschieden und auch nebeneinander liegende Bilder nicht gleich sein.

Sina gefällt das Fensterbild Nummer 4 nicht und sie möchte für ihre sechs Teilflächen nur die Bilder 1, 2 und 3 jeweils zweimal verwenden. Tom gefallen alle Fensterbilder.



a) Sina will das Bild Nummer 1 oben links anbringen. Wie viele Möglichkeiten hat Sina dann für die Anordnung ihrer sechs Bilder?
b) Wie viele Möglichkeiten hat Sina für die Anordnung ihrer sechs Bilder insgesamt? (oben links kann also Bild 1, 2 oder 3 sein)
c) Tom bringt links die Bilder 1, 2 und 3 in dieser Reihenfolge untereinander an.
Notiere oder zeichne alle Möglichkeiten, wie er sein Fenster gestalten kann.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

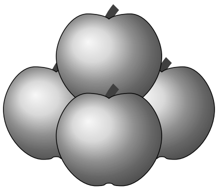
640613

Es werden Zahlen betrachtet, die größer als 1 sind und die bei der Division durch 2 den Rest 1 lassen, bei der Division durch 3 den Rest 1 lassen und auch bei der Division durch 5 den Rest 1 lassen.

a) Bestimme die kleinste dieser Zahlen.
b) Ermittle, wie viele solcher Zahlen es bis 160 gibt.
c) Bestimme entsprechend die kleinste Zahl, die größer als 1 ist und die bei der Division durch 2, durch 5 und durch 7 jeweils den Rest 1 lässt.

640614

Mika nimmt vier Äpfel aus einer Kiste und stapelt sie zu einer Pyramide mit der Kantenlänge 2 (Äpfel). Dann nimmt er die übrigen Äpfel aus der Kiste und baut aus der kleinen Pyramide eine größere Pyramide.



a) Wie viele Äpfel benötigt Mika zusätzlich für eine Pyramide mit der Kantenlänge 3?
b) Wie viele Äpfel benötigt Mika insgesamt für eine Pyramide mit der Kantenlänge 4?
c) In der Kiste waren 40 Äpfel. Welche Kantenlänge hat die größte Pyramide, die Mika aus diesen 40 Äpfeln bauen kann, und wie viele Äpfel bleiben dabei übrig?

64. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

640711

Auf einem Tisch stehen fünf verschlossene Töpfe. Die Töpfe sind mit den Zahlen von 1 bis 5 durchnummeriert. In genau einem der fünf Töpfe befindet sich eine Kugel. Es werden die folgenden Aussagen gemacht, von denen genau eine wahr ist, die anderen vier sind falsch.

(1) Die Kugel liegt im 1. Topf.
(2) Die Kugel liegt nicht im 2. Topf.
(3) Die Kugel liegt im 4. Topf.
(4) Die Kugel liegt im 5. Topf.
(5) Im 5. Topf liegt die Kugel nicht.

Zeige, dass man aus diesen Angaben den Topf ermitteln kann, in dem die Kugel liegt, und gib die Nummer dieses Topfes an.

640712

In einer Stadt wird für den öffentlichen Bahn- und Busverkehr eine Rabattkarte angeboten. Sie kostet 10 Euro und hat jeweils einen Monat Gültigkeit. Wer im Besitz einer solchen Karte ist, muss für den Einzelfahrschein statt 2,65 Euro nur noch 2,20 Euro bezahlen.

a) Berechne die Fahrtkosten für 18 Fahrten innerhalb eines Monats, und zwar sowohl mit gekaufter Rabattkarte als auch ohne diese Karte.
b) Berechne die Anzahl der Fahrten, die eine Person mit der Rabattkarte in einem Monat gemacht hat, wenn sie insgesamt genau 65 Euro für die Fahrten bezahlt hat.
c) Berechne die kleinste Anzahl von Fahrten innerhalb eines Monats, bei der die Kosten mit Rabattkarte niedriger als ohne Rabattkarte sind.

640713

Ein Dreieck soll die Seitenlängen 8 cm, 12 cm und x cm mit einer natürlichen Zahl x haben.

a) Ermittle die kleinste und die größte Zahl x, für die ein solches Dreieck existiert.
b) Zusätzlich soll nun der Umfang des Dreiecks die Länge p cm mit einer Primzahl p haben. Ermittle alle Zahlen x, für die ein solches Dreieck existiert.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

640714

In der nebenstehenden Abbildung A 640714 a gibt es sechs nummerierte Felder. In das erste, dritte und sechste Feld soll jeweils genau eine der Ziffern 0 bis 9 eingetragen werden. In das zweite Feld soll genau eines der Operationszeichen $+$, $-$, $*$ und : eingetragen werden. In das vierte Feld soll genau eines der Relationszeichen $=$, $<$ und $>$ eingetragen werden. In das fünfte Feld soll entweder genau eine der Ziffern 1 bis 9 eingetragen werden oder es bleibt frei. Es können so Gleichungen und Ungleichungen gebildet werden. Dabei ist die Eintragung „$6 + 5 = 11$“ von der Eintragung „$5 + 6 = 11$“ verschieden, weil sie sich zum Beispiel im ersten Feld unterscheiden. In den Abbildungen A 640714 b und A 640714 c sind korrekte Eintragungen dargestellt.

1.	2.	3.	4.	5.	6.

A 640714 a

1	$+$	2	$=$		3
1.	2.	3.	4.	5.	6.

A 640714 b

3	$*$	4	$<$	1	3
1.	2.	3.	4.	5.	6.

A 640714 c

a) Ermittle, wie viele korrekte Gleichungen eingetragen werden können, wenn im zweiten Feld nur das Additions- oder das Multiplikationszeichen stehen darf.

b) Ermittle, wie viele korrekte Gleichungen eingetragen werden können, wenn im zweiten Feld nur das Subtraktions- oder das Divisionszeichen stehen darf.

c) Ermittle, wie viele korrekte Ungleichungen eingetragen werden können.

Hinweis: Unter einer korrekten Gleichung bzw. einer korrekten Ungleichung versteht man eine nach den Vorgaben der Aufgabenstellung eingetragene Gleichung bzw. Ungleichung, die eine wahre Aussage ist.

Olympiadeklasse

8

64. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

640811

Die Klasse 8c gratuliert ihrem Klassenlehrer Herrn Müller zum Geburtstag. Er wird nach seinem Alter gefragt. Da Herr Müller Mathematiklehrer ist, nennt er sein Alter natürlich nicht einfach so. Er stellt der Klasse ein Rätsel und nennt folgende Eigenschaften der Zahl, die sein Alter in Jahren angibt:

(1) Sie ist kleiner als 45.
(2) Die Summe ihrer Zehnerziffer und ihrer Einerziffer ist zweistellig.
(3) Ihre Einerziffer ist ungerade.
(4) Ihre Zehnerziffer ist nicht ungerade.

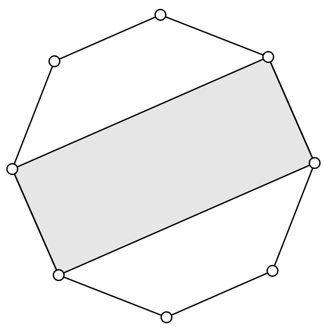
Zeige, dass die Zahl, die Herrn Müllers Alter in Jahren angibt, durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt ist, und gib sie an.

640812

Einem regelmäßigen Achteck ist wie abgebildet ein Rechteck einbeschrieben.

Bestimme den Anteil des Flächeninhalts dieses Rechtecks am Flächeninhalt des Achtecks.

Hinweis: Bei einem regelmäßigen Achteck sind die Seiten alle gleich lang und die Eckpunkte liegen alle auf einem Kreis.



640813

Ermittle alle geordneten Paare natürlicher Zahlen größer als 0, deren Produkt genau 8-mal so groß wie ihre Summe ist.

Hinweis: Bei geordneten Paaren ist die Reihenfolge zu beachten. So sind $(3, 4)$ und $(4, 3)$ verschiedene geordnete Paare.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

640814

a) Zeige, dass sich aus fünf natürlichen Zahlen stets zwei Zahlen auswählen lassen, deren Differenz durch 4 teilbar ist.

b) Zeige, dass sich aus fünf natürlichen Zahlen stets drei Zahlen auswählen lassen, deren Summe durch 3 teilbar ist.

c) Untersuche, ob sich aus vier natürlichen Zahlen stets drei Zahlen auswählen lassen, deren Summe durch 3 teilbar ist.

Olympiadeklassen **9–10**

64. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Olympiadeklassen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

641011

a) Man bestimme die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x, y, z) der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

b) Man bestimme die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x, y, z) der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Hinweis: Eine Lösung ist ein *geordnetes* Tripel (x, y, z), welches die jeweilige Gleichung erfüllt.

Hinweis: Die Gleichung $x^2 + y^2 + 4 \cdot z^2 = 4$ hat genau sechs ganzzahlige Lösungen, die alle (paarweise) verschieden sind: $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(-2, 0, 0)$, $(0, -2, 0)$.

641012

In einem gegebenen Kreis betrachten wir konvexe Vierecke. Die Ecken der Vierecke dürfen im Innern des Kreises liegen oder auf diesem Kreis.

Zeigen Sie, dass jedes solcher Vierecke mit größtem Flächeninhalt dann ein Quadrat ist.

Hinweis: In jedem konvexen Viereck sind alle Innenwinkel kleiner als 180°.

641013

Wir betrachten Figuren, die durch die Koordinaten einiger ihrer Punkte und die zur jeweiligen Figur gehörenden Verbindungsstrecken gegeben sind.

a) $A(2, 2)$, $E(14, 2)$, $B(23, 2)$, $F(23, 14)$, $C(23, 23)$, $G(11, 23)$, $D(2, 23)$ und $H(2, 11)$ mit den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ und $\overline{HE}$.
Zeigen Sie, dass das Viereck $EFGH$ ein Quadrat ist und bestimmen Sie seine Seitenlänge.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

b) $A(1,2)$, $B(13,2)$, $C(25,2)$, $D(25,11)$ und $E(1,18)$ mit den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$, $\overline{BE}$ und $\overline{BD}$.
Zeigen Sie, dass die Strecke $\overline{BD}$ den Winkel $\sphericalangle EDC$ halbiert.

641014

Wir berechnen für jede positive ganze Zahl n die Zahl y anhand der Formel

$$y = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{4}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass y für $n = 9$ und auch für $n = 2025$ jeweils das Produkt von zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist.

b) Zeigen Sie, dass y für jede positive ganze Zahl n das Produkt von zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist.

641015

Ein Schaf und eine Ziege können eine Wiese gemeinsam in 50 Minuten abfressen.

Eine Ziege allein hätte 80 Minuten gebraucht, um die Wiese abzufressen.

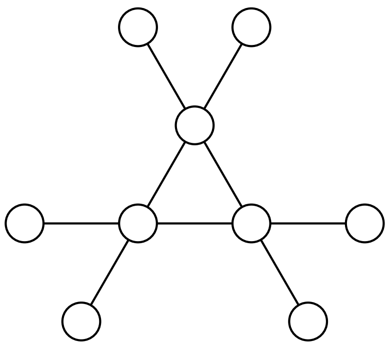
Ermitteln Sie die Zeit, in der 5 Schafe und 2 Ziegen die Wiese abfressen können, wenn gilt: Alle Schafe fressen gleich schnell und alle Ziegen fressen auch gleich schnell. Die Fressgeschwindigkeit eines Tieres ändert sich nicht, wenn weitere Tiere anwesend sind.

641016

In der abgebildeten Figur ist jeder der neun eingezeichneten Kreise mit je einer der jeweils in den Teilaufgaben festgelegten Zahlen so zu beschriften, dass alle neun Zahlen verwendet werden und auf jedem der drei geradlinigen Abschnitte (auf denen sich jeweils vier Kreise befinden) die Summe s der vier Zahlen in jedem geradlinigen Abschnitt stets die gleiche ist.

a) Hier sollen die neun Zahlen 2021, 2022, 2023, …, 2029 eingetragen werden.
Geben Sie eine derartige Beschriftung und die mit dieser Beschriftung erreichte Abschnittssumme s an.
Überprüfen Sie außerdem, ob es derartige Beschriftungen mit den gegebenen Zahlen gibt, bei denen die Abschnittssumme s den Wert 8097 bzw. den Wert 8104 hat.

b) In dieser Teilaufgabe tragen wir die neun Zahlen 1, 2, 2^2, 2^3, …, 2^8 ein.
Wie viele Werte kann die gemeinsame Abschnittssumme s annehmen?



Olympiadeklassen **11–12**

64. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

641211

Man untersuche, ob es fünf ganze Zahlen a, b, c, d und e gibt, für die die Bedingung

$$0 < a < b < c < d < e < 10$$

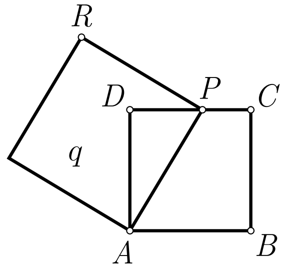
erfüllt ist und die Gleichung

$$a^e = (bd + 1)c$$

gilt. Wenn das der Fall ist, bestimme man alle Lösungstupel (a, b, c, d, e).

641212

Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ in der Ebene. Auf der Seite $\overline{CD}$ sei P ein beliebiger Punkt. Mit der Seite $\overline{AP}$ wird dann ein weiteres Quadrat q so gewählt, dass der Punkt B nicht im Inneren und nicht auf dem Rand von q liegt. Der in q dem Eckpunkt A diagonal gegenüberliegende Eckpunkt wird mit R bezeichnet, siehe Abbildung A 641212.



A 641212

a) Man begründe, dass es für jeden Punkt P der Strecke $\overline{CD}$ genau ein Quadrat q gibt, das die angegebenen Bedingungen erfüllt.

b) Man ermittle die Menge aller Punkte R, die auf die beschriebene Weise konstruiert werden können.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

641213

a) Es sei x eine beliebige reelle Zahl. Man beweise die Ungleichung

$$9\left(x^3+x\right) \leq 2\left(x^2+x+1\right)^2 .$$

b) Es seien x und y zwei beliebige reelle Zahlen. Man beweise die Ungleichung

$$9\left(x^3y+xy^3\right) \leq 2\left(x^2+xy+y^2\right)^2 .$$

641214

An einer Tafel stehen am Anfang die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6. Hermine darf nun beliebig oft die folgende Operation ausführen:

Sie wischt zwei Zahlen a und b weg und schreibt dafür die beiden Zahlen $a+b$ und $2\,|a-b|$ hin.

Man bestimme die größte natürliche Zahl k, für die Hermine nach endlich vielen Schritten erreichen kann, dass k Nullen an der Tafel stehen.